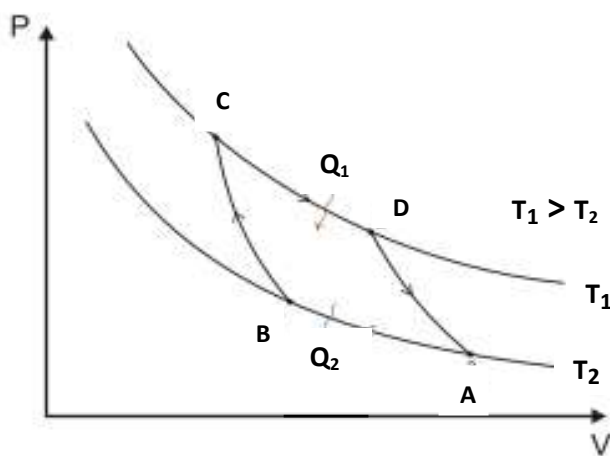


TD. N°4. Thermodynamique. Filière SMA. S1
Corrigé.

I-Machines thermiques.

Exercice: 1. Moteur thermique & Machine frigorifique.

1) Représentation.



Sens : horaire (sens des aiguilles d'une montre)

Signe du travail : $W < 0$

2) Relation entre volumes:

BC, transformation isentropique donc adiabatique: $T_B V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{V_B}{V_C} = \left(\frac{T_C}{T_B}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$

DA, transformation isentropique donc adiabatique: $T_D V_D^{\gamma-1} = T_A V_A^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{V_A}{V_D} = \left(\frac{T_D}{T_A}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$

On a donc : $\frac{V_B}{V_C} = \frac{V_A}{V_D} \Rightarrow \frac{V_A}{V_B} = \frac{V_D}{V_C}$

3) Chaleurs échangées

AB transformation isotherme. Gaz parfait : $\Delta U = 0$.

Premier principe $\Delta U = W_2 + Q_2 = 0 \Rightarrow Q_2 = -W_2$ soit : $Q_2 = nR T_2 \ln \frac{V_B}{V_A}$ (1)

De même pour CD (transf. Isotherme), $\Delta U = W_1 + Q_1 = 0 \Rightarrow Q_1 = -W_1$

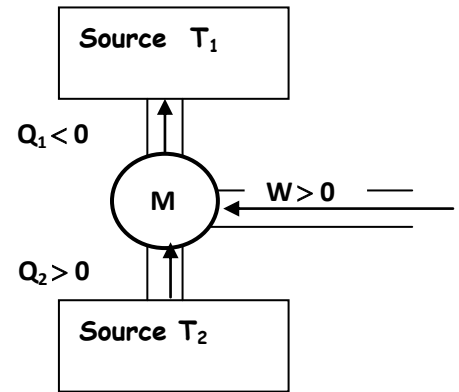
soit : $Q_1 = nR T_1 \ln \frac{V_D}{V_C}$ (2)

On déduit de (1) et (2) : $\frac{Q_1}{T_1} = nR \ln \frac{V_D}{V_C} = nR \ln \frac{V_A}{V_B}$, d'après la question 2)

et d'après (1), $nR \ln \frac{V_A}{V_B} = -\frac{Q_2}{T_2}$, d'où : $\frac{Q_1}{T_1} = -\frac{Q_2}{T_2} \Rightarrow \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$, (égalité de Clausius)

Interprétation : L'égalité de Clausius est la traduction de la relation : $\Delta S_{cycle} = 0$. (voir cours).

4) Représentation de la machine :



5) Efficacité :

Par définition :

$$\beta = \frac{\text{énergie recherchée}}{\text{énergie payée}}$$

$$\beta = \frac{Q_2}{W}$$

D'après le Premier principe : $\Delta U = W + Q_1 + Q_2 = 0$ (3)

D'après le deuxième principe : $\Delta S_{\text{cycle}} = \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$ (4)

D'après (3) : $W = -Q_1 - Q_2$ et d'après (4) $Q_1 = -\frac{T_1}{T_2} \cdot Q_2$

En remplaçant dans l'expression de l'efficacité :

$$\beta = \frac{Q_2}{\frac{T_1}{T_2} \cdot Q_2 - Q_2} = \frac{1}{\frac{T_1}{T_2} - 1} \Rightarrow \beta = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

$$\text{A.N : } \beta = \frac{T_2}{T_1 - T_2} = \frac{258}{298 - 258} = 6,45$$

6) Chaleur empruntée à la source froide, $\beta = \frac{Q_2}{W} \Rightarrow Q_2 = \beta \cdot W$,

$$\text{A.N : } Q_2 = 6,445 \cdot 12 \text{ kJ} = 77,4 \text{ kJ}.$$

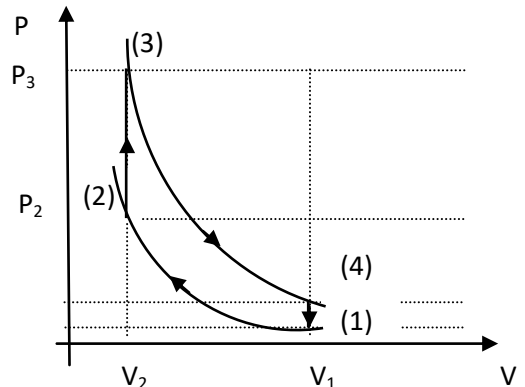
Exercice: 2. Moteur à combustion interne.

1) Représentation du cycle dans le diagramme (P, V).

N.B : les courbes des adiabatiques d'équation :

$$PV^\gamma = \text{cste} \Rightarrow P = \frac{\text{cste}}{V^\gamma}, \text{ ne sont pas parallèles.}$$

Seul un diagramme à l'échelle donnera une idée plus précise sur l'allure du cycle après avoir calculé les valeurs numériques des pressions P_2, P_3 et P_4 .



2) AB, transf. Adiabatique réversible, on donc :

$$PV^\gamma = \text{cste} \text{ ou } TV^{\gamma-1} = \text{cste} \Rightarrow T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} \text{ et comme } V_1 = a \cdot V_2, \text{ on déduit que :}$$

$$T_2 = T_1 a^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = a^{\gamma-1}$$

De même pour la transf. CD, on a : $T_3 V_2^{\gamma-1} = T_4 V_1^{\gamma-1}$ car $V_3 = V_2$ et $V_4 = V_1$

$$T_3 = T_4 a^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{T_3}{T_4} = a^{\gamma-1}$$

Le rendement étant défini par : $\eta = -\frac{W_{\text{cycle}}}{Q_1} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1}$,

Et sachant que pour l'unité de masse, on a :

$$Q_1 = c_V^0(T_3 - T_2) \text{ et } Q_2 = c_V^0(T_1 - T_4), \text{ il vient : } \eta = 1 + \frac{T_1 - T_4}{T_3 - T_2},$$

avec $T_1 = T_2 a^{1-\gamma}$ et $T_3 = T_4 a^{\gamma-1}$, on déduit que $\eta = 1 - a^{1-\gamma}$.

3) - AB, transf. Adiabatique réversible, on donc : $PV^\gamma = \text{cste}$, on a donc :

$$P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma \Rightarrow P_2 = P_1 \cdot a^\gamma ; \quad \text{A.N: } P_2 = 11,18 \text{ atm.}$$

- BC transf. isochore, dans le cas présent : $Q_1 = 300 \text{ cal/g} = 300 \text{ kcal/kg}$,
Comme $Q_1 = c_V^0(T_3 - T_2) \Rightarrow T_3 = T_2 + \frac{Q_1}{c_V^0} = T_1 a^{\gamma-1} + \frac{Q_1}{c_V^0}$;
A.N : $T_3 = 291.5^{0,5} + \frac{300}{0,2} \Rightarrow T_3 \approx 2151 \text{ K}$;
Remarque : $c_V = 0,2 \text{ cal/g} \cdot ^\circ\text{C} = 0,2 \text{ cal/g} \cdot \text{K}$ car $\Delta T (\text{K}) = \Delta \theta (^\circ\text{C})$ et on rappelle que :
 $C_v = n c_v = m c_v^0$ avec : $C_v = \left[\frac{\delta Q}{dT} \right]_v$
De même, on a : $P_2 V_2 = n \cdot R \cdot T_2$ et $P_3 V_2 = n \cdot R \cdot T_3 \Rightarrow \frac{P_3}{T_3} = \frac{P_2}{T_2} \Rightarrow P_3 = T_3 \cdot \frac{P_2}{T_2}$, soit :
 $P_3 = P_2 \cdot \frac{T_3}{T_1 a^{\gamma-1}}$; A.N : $P_3 = 11,18 \cdot \frac{2151}{291,5^{0,5}} = 37 \text{ atm}$.
- CD, transf. Adiabatique réversible, on donc : $PV^\gamma = \text{cste}$, on a donc :
 $P_3 V_2^\gamma = P_4 V_1^\gamma \Rightarrow P_4 = P_3 \cdot a^{-\gamma}$; A.N : $P_4 = 3,3 \text{ atm}$.
- DA transf. isochore, comme précédemment (pour BC), on a : $\frac{P_4}{T_4} = \frac{P_1}{T_1} \Rightarrow T_4 = T_1 \cdot \frac{P_4}{P_1}$
A.N : $T_4 = 960 \text{ K}$
- Calcul du rendement : $\eta = 1 - a^{1-\gamma}$; A.N : $\eta = 0,55 = 55\%$

Remarque : $\eta = 1 - a^{1-\gamma} = 1 - \frac{1}{a^{0,5}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{a}}$; avec $a = \frac{V_1}{V_2}$. Si on augmente le taux de compression « a », le rendement tendrait vers l'unité. Or augmenter « a » passerait par une augmentation de V_1 ou une diminution de V_2 . Dans la pratique, on ne peut augmenter à volonté V_1 ni réduire à volonté V_2 .

Exercice: 3. Pompe à chaleur.

1) Coefficient de performance ou Efficacité :

Soit Q_1 la chaleur échangée par la pompe avec la source chaude, Q_2 la chaleur échangée par la pompe avec la source froide et W le travail reçu par la pompe.

Par définition : $\beta = - \frac{Q_1}{W}$

D'après le Premier principe : $\Delta U = W + Q_1 + Q_2 = 0$ (1)

D'après le deuxième principe : $\Delta S_{\text{cycle}} = \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$ (2)

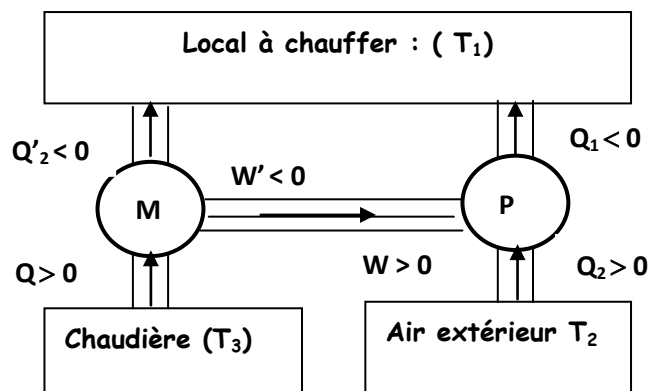
D'après (1), $W = -Q_1 - Q_2$, et D'après (2), $Q_1 = -\frac{T_1}{T_2} \cdot Q_2$, d'où : $\beta = - \frac{Q_1}{-Q_1 - Q_2}$

$$\beta = \frac{1}{1 + \frac{Q_2}{Q_1}} = \frac{1}{1 - \frac{T_2}{T_1}} = \frac{T_1}{T_1 - T_2} ; \quad \text{A.N : } \beta = \frac{293}{293 - 268} \approx 11,7$$

Le travail consommé est tel que: $\beta = - \frac{Q_1}{W}$ soit $W = - \frac{Q_1}{\beta}$; A.N : $W = - \frac{164 \text{ kJ}}{11,7} = 14 \text{ kJ}$,

2) Etude du premier dispositif :

M = Moteur, P = Pompe



Le schéma ci-dessus montre que la chaleur reçue par le local (positive pour le local) est la somme de la chaleur rejetée par le moteur ($-Q'_2$) et la chaleur fournie par la pompe ($-Q_1$) :

$$Q_{local} = -Q'_2 - Q_1, \quad (\text{N.B : } Q'_2 \text{ et } Q_1 \text{ sont négatives par convention})$$

- Pompe à chaleur :

Q_1 et Q_2 chaleurs échangées et W le travail reçu.

D'après le Premier principe : $\Delta U = W + Q_1 + Q_2 = 0$ (3)

D'après le deuxième principe : $\Delta S_{cycle} = \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$ (4)

- Moteur

D'après le Premier principe : $\Delta U = W' + Q'_1 + Q'_2 = 0$ (5)

D'après le deuxième principe : $\Delta S_{cycle} = \frac{Q'_1}{T'_1} + \frac{Q'_2}{T'_2} = 0$ (6)

Pour les relations (5) et (6), on doit préciser que :

$W' = -W, Q'_1 = Q, d'après l'énoncé, T'_1 = T_3 \text{ et } T'_2 = T_1.$

Avec ces notations les relations (5) et (6) s'écrivent :

$$-W + Q + Q'_2 = 0 \quad (5')$$

$$\frac{Q}{T_3} + \frac{Q'_2}{T_1} = 0 \quad (6')$$

Chaleur reçue par le local.

$Q_{local} = -Q_1 - Q'_2$. Pour calculer cette chaleur il faut déterminer Q_1 et Q'_2 .

D'après (6') : $Q'_2 = -Q \cdot \frac{T_1}{T_3}$ (7) et d'après (5') $W = Q + Q'_2 = Q - Q \cdot \frac{T_1}{T_3} = Q(1 - \frac{T_1}{T_3})$ (8)

Et d'après (4) $Q_2 = -\frac{T_2}{T_1} \cdot Q_1$ et d'après (3) $W = -Q_1 - Q_2 = -Q_1(1 - \frac{T_2}{T_1})$ (9)

En identifiant les expressions de W données par (8) et (9), on obtient :

$$Q_1 = -Q \cdot \frac{1 - \frac{T_1}{T_3}}{1 - \frac{T_2}{T_1}}$$

En tenant compte de cette expression et de celle de Q'_2 (7), on obtient :

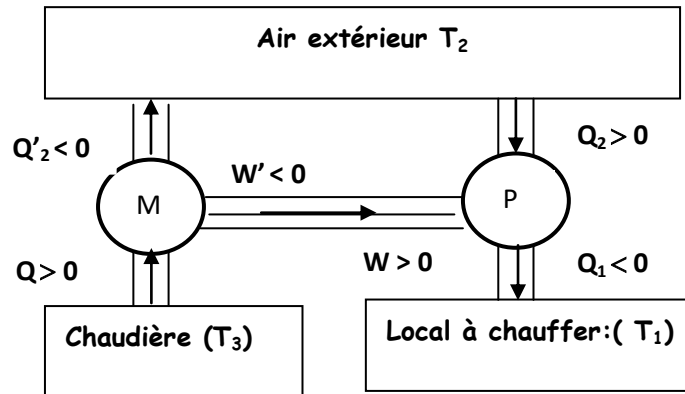
$$Q_{local} = -Q_1 - Q'_2 = Q \cdot \frac{1 - \frac{T_1}{T_3}}{1 - \frac{T_2}{T_1}} + Q \cdot \frac{T_1}{T_3} \Rightarrow \frac{Q_{local}}{Q} = \frac{1 - \frac{T_1}{T_3}}{1 - \frac{T_2}{T_1}} + \frac{T_1}{T_3} = \frac{T_1(T_3 - T_2)}{T_3(T_1 - T_2)},$$

A.N : $T_1 = 293 \text{ K} ; T_2 = 268 \text{ K} ; T_3 = 483 \text{ K}$

$$\frac{Q_{local}}{Q} = \frac{293(483 - 268)}{483(293 - 268)} = 5,216$$

3) Etude du deuxième dispositif :

Le schéma correspondant à ce dispositif est le suivant :



Le schéma ci-dessus montre que la chaleur reçue par le local (positive pour le local) est dans ce cas fournie par la pompe, le moteur n'est plus en communication avec le local.

$$Q_{local} = -Q_1, \quad (Q_1 \text{ est négative par convention})$$

- Pompe à chaleur :
Dans ce dispositif, la pompe à chaleur fonctionne entre les mêmes sources comme dans la premier dispositif. On donc les mêmes relations.
- Moteur :
Dans ce dispositif, la source froide du moteur n'est plus le local mais l'air extérieur. On a donc :

$$T'_2 = T_2, \text{ la relation (7) s'écrit dans ce cas : } Q'_2 = -Q \cdot \frac{T_2}{T_3} \quad (7')$$

Chaleur reçue par le local.

$Q_{local} = -Q_1$, le calcul de la chaleur reçue par le local est analogue au calcul précédent, la seule modification à apporter est de remplacer T_1 par T_2 dans la relation (8). On a donc :

$$W = Q(1 - \frac{T_2}{T_3}) \quad (8') \quad \text{et} \quad W = -Q_1(1 - \frac{T_2}{T_1}) \quad (9)$$

En identifiant les expressions de W données par (8') et (9), on obtient :

$$Q_1 = -Q \cdot \frac{1 - \frac{T_2}{T_3}}{1 - \frac{T_2}{T_1}}, \text{ et } Q_{local} = -Q_1 = Q \cdot \frac{1 - \frac{T_2}{T_3}}{1 - \frac{T_2}{T_1}} \Rightarrow \frac{Q_{local}}{Q} = \frac{1 - \frac{T_2}{T_3}}{1 - \frac{T_2}{T_1}} ; \text{ A.N : } \frac{Q_{local}}{Q} = \frac{1 - \frac{268}{533}}{1 - \frac{268}{293}} \approx 5,83$$

4) Comparaison des deux dispositifs :

Les résultats de cette étude montrent que :

- ✓ Pour une différence de températures de la chaudière de 50°C (210→260), le deuxième dispositif apporte au local 12% de chaleur en plus.
- ✓ L'avantage du premier dispositif réside dans le fait de fournir au local la chaleur rejetée par le moteur.
- ✓ L'avantage du deuxième dispositif réside dans l'utilisation d'une chaudière à température plus élevée, ce qui a pour conséquence un meilleur rendement.

Pour tirer profit de la chaleur Q produite :

- ✓ La température de la chaudière doit être la plus élevée, donc le deuxième dispositif est le plus approprié.

Exercice: 4. Moteur Diesel.

1) Coordonnées des points B, C et D :

✓ Point B : A→B, transformation réversible adiabatique, $T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1} \Rightarrow V_B = V_A \cdot \left(\frac{T_A}{T_B}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$

A.N : $V_B = 0,16 \ell$.

De même on a : $T_A^{\gamma} P_A^{1-\gamma} = T_B^{\gamma} P_B^{1-\gamma} \Rightarrow P_B = P_A \cdot \left(\frac{T_A}{T_B}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$; A.N : $P_B = 44,3 \text{ atm}$.

✓ Point C : B→C, transformation isobare, $P_C = P_B = 44,3 \text{ atm}$.

De plus, loi des gaz parfaits ; $P_B V_B = n R \cdot T_B$ et $P_C V_C = n R \cdot T_C \Rightarrow T_C = \frac{V_C}{V_B} \cdot T_B$;

A.N : $T_C = 1431 \text{ K}$

✓ Point D : C→D, transformation réversible adiabatique, $T_C V_C^{\gamma-1} = T_D V_D^{\gamma-1} \Rightarrow T_D = T_C \cdot \left(\frac{V_C}{V_D}\right)^{\gamma-1}$;

A.N : $T_D = 569,7 \text{ K}$

De même on a : $P_C V_C^{\gamma} = P_D V_D^{\gamma} \Rightarrow P_D = P_C \cdot \left(\frac{V_C}{V_D}\right)^{\gamma}$; A.N : $P_D = 1,76 \text{ atm}$.

	A	B	C	D
P (atm.)	1,00	44,3	44,3	1,76
T (K)	323	954	1431	569,7
V (litre)	2,4	0,16	0,24	2,40

2) Allure du cycle décrit par le gaz dans le diagramme de Clapeyron :

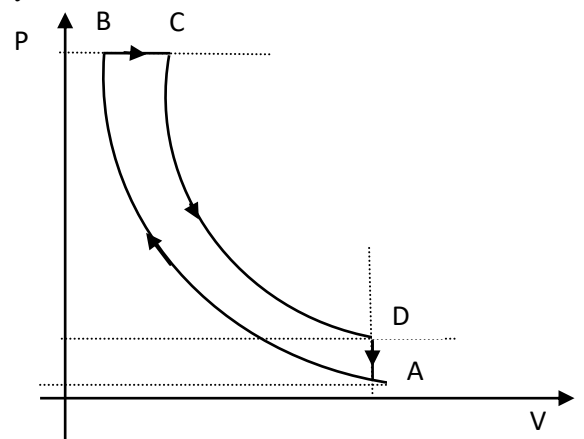
3)

Nombre n de moles du gaz :

$n = \frac{P_A V_A}{R T_A}$; A.N : $n = 8,94 \cdot 10^{-2} \text{ mole}$

Ou $n = \frac{P_D V_D}{R T_D}$; A.N : $n = 8,918 \cdot 10^{-2} \text{ mole}$

Soit $n \approx 8,9 \cdot 10^{-2} \text{ mole}$



4) Capacités thermiques :

$C_V = \frac{n \cdot R}{\gamma - 1}$; A.N : $C_V = 1,86 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ et $C_P = \gamma \cdot C_V$; A.N : $C_P = 2,6 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$

5) Travaux et quantités de chaleurs échangés par le gaz au cours de chacune des transformations AB, BC, CD et DA.

✓ A→B, transformation réversible adiabatique : $Q_{AB} = 0$;

De plus $\Delta U_{AB} = W_{AB} = C_V \cdot (T_B - T_A)$;

A.N : $W_{AB} = 1,17 \text{ kJ}$.

✓ B→C, transformation isobare : $Q_{BC} = C_P \cdot (T_C - T_B)$;

A.N : $Q_{BC} = 1,24 \text{ kJ}$.

Et $W_{BC} = -P_B \cdot (V_C - V_B)$;

A.N : $W_{BC} = -0,35 \text{ kJ}$.

✓ C→D, transformation réversible adiabatique : $Q_{CD} = 0$

Et $\Delta U_{CD} = W_{CD} = C_V \cdot (T_D - T_C)$;

A.N : $W_{CD} = -1,6 \text{ kJ}$.

✓ D→A, transformation isochore : $W_{DA} = 0$

De plus $\Delta U_{DA} = Q_{DA} = C_V \cdot (T_A - T_D)$;

A.N : $Q_{DA} = -0,46 \text{ kJ}$.

6) Rendement thermodynamique ρ du moteur Diesel étudié.

Par définition : $\rho = - \frac{W_{\text{cycle}}}{Q_C}$; avec Q_C étant la quantité de chaleur reçue par le moteur. Dans notre cas $Q_C = Q_{BC} = 1,24 \text{ kJ}$. D'où :

$$\rho = - \frac{W_{cycle}}{Q_{BC}} = - \frac{W_{AB} + W_{BC} + W_{CD}}{Q_{BC}} ;$$

$$\text{A.N : } \rho = 0,63 = 63\%$$

7) Rendement d'un moteur de Carnot fonctionnant entre les mêmes températures extrêmes du cycle.

Les températures extrêmes du cycle sont T_A et T_C et par conséquent, le rendement de Carnot s'écrit :

$$\rho_{Carnot} = 1 - \frac{T_A}{T_C} = 0,77 = 77\%$$

8) $\rho_{Carnot} > \rho_{Diesel}$, le moteur Diesel est moins performant que le moteur de Carnot car ce dernier est idéal car formé de transformations réversibles.

II- Potentiels thermodynamiques.

Exercice 5

Soit V_1 et S_1 le volume et l'entropie du système ($\Sigma 1$) et V_2 et S_2 le volume et l'entropie du système ($\Sigma 2$). Les deux systèmes étant à l'équilibre le volume V et l'entropie S de l'ensemble sont constants. Sachant que $V = V_1 + V_2$ et que $S = S_1 + S_2$ (V et S étant des variables extensives), on a : $dV_1 = -dV_2 = dV$ et $dS_1 = -dS_2 = dS$

La variation d'énergie interne totale :

$$dU = dU_1 + dU_2 = T_1 dS_1 - P_1 dV_1 + T_2 dS_2 - P_2 dV_2$$

$$dU = T_1 dS_1 + T_2 dS_2 - P_1 dV_1 - P_2 dV_2$$

$$dU = (T_1 - T_2) dS - (P_1 - P_2) dV$$

Comme à l'équilibre, l'énergie interne est constante soit : $dU = 0$, ce qui implique que :

$$T_1 = T_2 \text{ et } P_1 = P_2$$

Exercice 6

1) Pour une transformation infinitésimale réversible, en considérant T et P comme variables indépendantes on a : $dH = T dS + V dP = C_P dT + (h + V) dP$ et comme : $dH = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T dP$,

$$\text{On a donc : } c_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P \quad (1) \quad \text{et } (h + V) = \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T \Rightarrow h = -V + \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T \quad (2).$$

$$\text{De même, on a : } dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{C_P}{T} dT + \frac{h}{T} dP, \text{ d'une part et d'autre part : } dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T dP$$

$$\Rightarrow \frac{C_P}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P \Rightarrow c_P = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P \quad (3) \quad \text{et } \frac{h}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T \Rightarrow h = T \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T \quad (4).$$

$$2) \text{ On a : } G = H - TS \Rightarrow \frac{G}{T} = \frac{H}{T} - S \text{ et } \left[\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{G}{T}\right)\right]_P = -\frac{H}{T^2} + \frac{1}{T} \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P - \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P \quad (5)$$

$$\text{Or on a à la fois : } c_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P \quad (1) \text{ et } c_P = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P \quad (3)$$

$$\text{D'où la relation (5) s'écrit : } \left[\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{G}{T}\right)\right]_P = -\frac{H}{T^2} + \frac{1}{T} c_P - \frac{c_P}{T} = -\frac{H}{T^2} \Rightarrow H = -T^2 \left[\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{G}{T}\right)\right]_P$$

Exercice 7

On sait que la différentielle de F est : $dF = -SdT - PdV$

L'équation d'état s'obtient à partir de P :

$$P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = -\frac{3}{2} \cdot nR \times -\frac{2}{3} T \cdot \frac{1}{V} = \frac{nR \cdot T}{V}, \text{ soit } PV = n \cdot RT$$

$$\text{Et l'entropie : } S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = -\frac{3}{2} nR \left[1 - \ln \frac{T}{T_0} - 1 - \frac{2}{3} \ln \frac{V}{V_0} \right] + S_0,$$

$$\text{Soit l'expression classique : } S = n \left[\frac{3}{2} R \ln \frac{T}{T_0} + R \ln \frac{V}{V_0} \right] + S_0,$$

$$\text{On en déduit U, ensuite par : } U = F + TS = \frac{3}{2} nR(T - T_0) + U_0$$
